PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 08

SERII DE TIMP

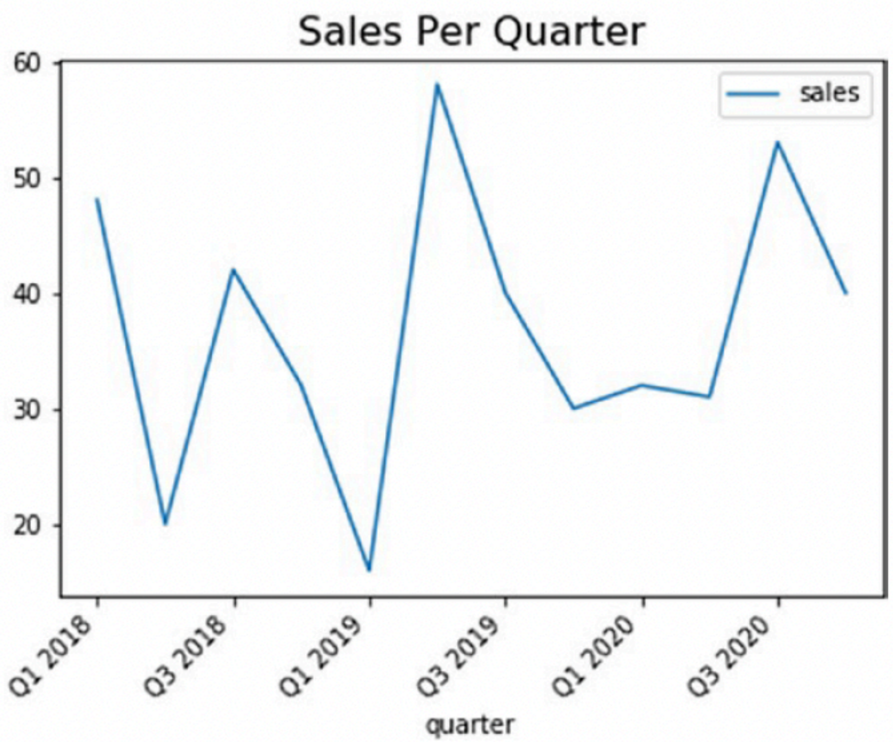
Cristian Rusu

CUPRINS

- caracteristici ale seriilor de timp
- metode de învățare pentru serii de timp
- metode de predicție pentru serii de timp
- modele AR și MA

SERII DE TIMP

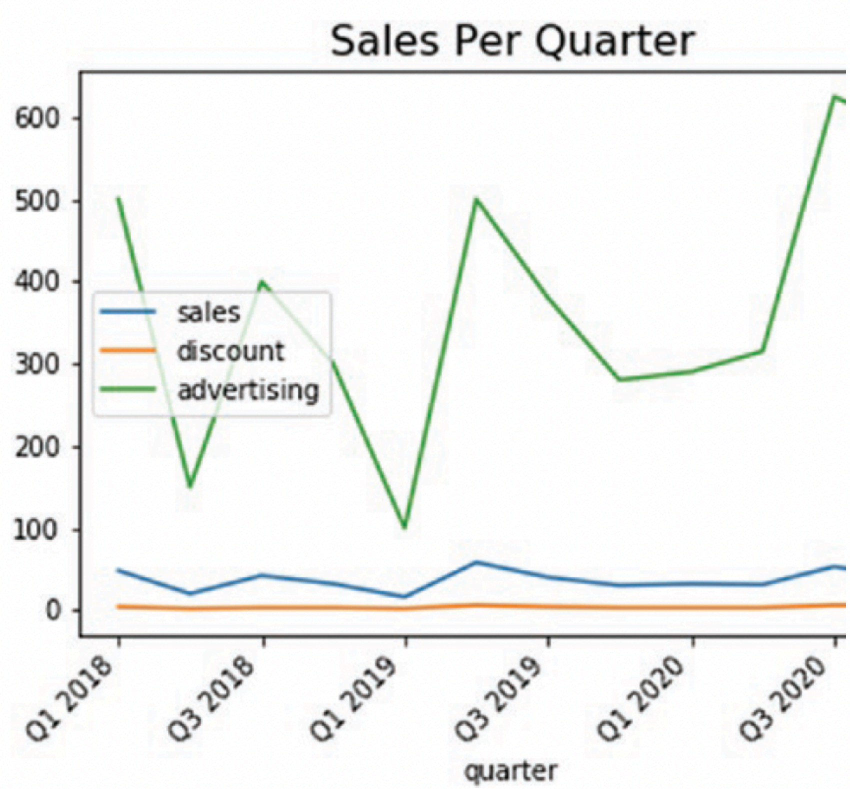
- serie de timp univariată = un vector + timestamp



Period	Quarterly Sales
Q1 2018	48,000
Q2 2018	20,000
Q3 2018	35,000
Q4 2018	32,0000
Q1 2019	16,000
Q2 2019	58,000
Q3 2019	40,000
Q4 2019	30,000
Q1 2020	32,000
Q2 2020	31,000
Q3 2020	63,000
Q4 2020	57,000

SERII DE TIMP

- serie de timp multivariată = o matrice + timestamp



Period	Quarterly Sales	Avg. Discount	Advertising Budget
Q1 2018	48,000	4%	500
Q2 2018	20,000	2%	150
Q3 2018	35,000	3%	400
Q4 2018	32,0000	3%	300
Q1 2019	16,000	2%	100
Q2 2019	58,000	6%	500
Q3 2019	40,000	4%	380
Q4 2019	30,000	3%	280
Q1 2020	32,000	3%	290
Q2 2020	31,000	3%	315
Q3 2020	63,000	6%	625
Q4 2020	57,000	6%	585

SERII DE TIMP

- serie de timp multivariată = o matrice + timestamp
- serie de timp multivariată scalată

- analiză de corelație (*correlation coefficients*) pentru a verifica diversitatea datelor din matrice

TIPURI DE SERII DE TIMP

- univariate vs. multivariate
- supervizate vs. nesupervizate
- clasificare vs. regresie

PREDICȚII PENTRU SERII DE TIMP

- cum evaluăm calitatea unei predicții?
- notăm cu $y[i]$ și $\hat{y}[i]$ valoarea seriei și a predicției la indexul i
- calitatea predicției poate fi definită de:

$$\text{Mean Squared Error (MSE)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y[i]-\hat{y}[i])^2, \text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}$$

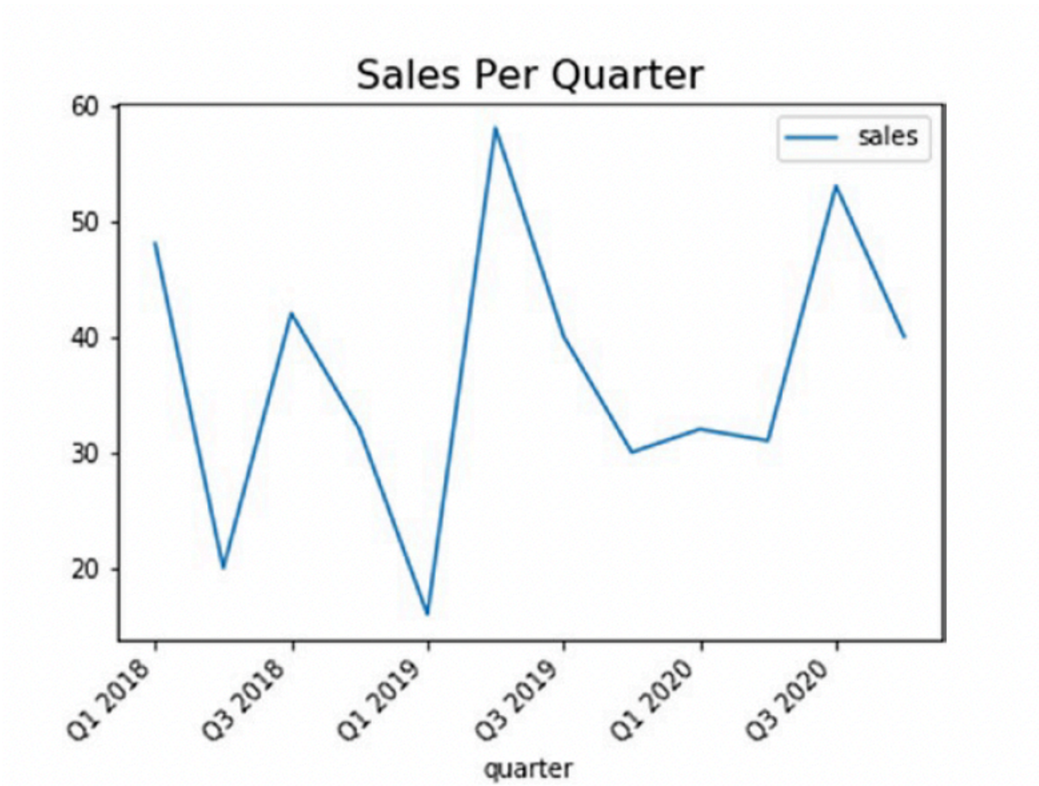
$$\text{Mean Absolute Error (MAE)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \quad y[i]-\hat{y}[i]$$

$$\text{Mean Absolute Percent Error (MAPE)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y[i]-\hat{y}[i]}{y[i]}\right|$$

$$\text{R squared } (\text{R}^2) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y[i]-\hat{y}[i])^2}{\sum_{i=1}^{n}(y[i]-\bar{y})^2}$$

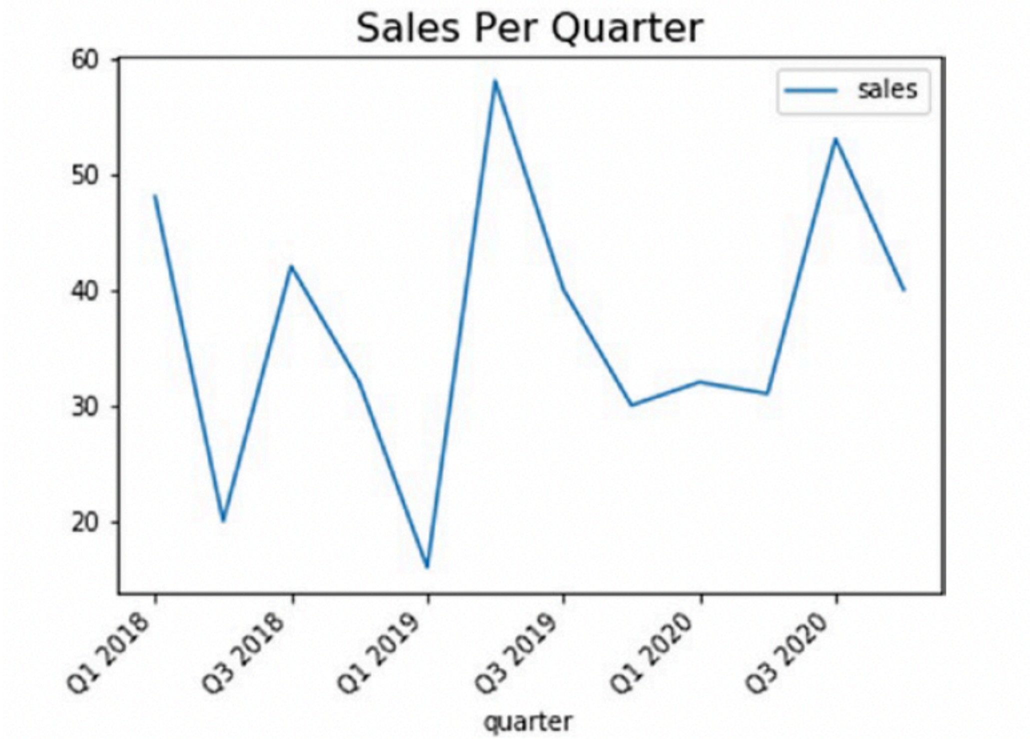
PREDICȚII PENTRU SERII DE TIMP

- vi se dă seria de timp de mai jos
- propuneți moduri prin care puteți să preziceți următoarea valoare din serie (Q1 2019)



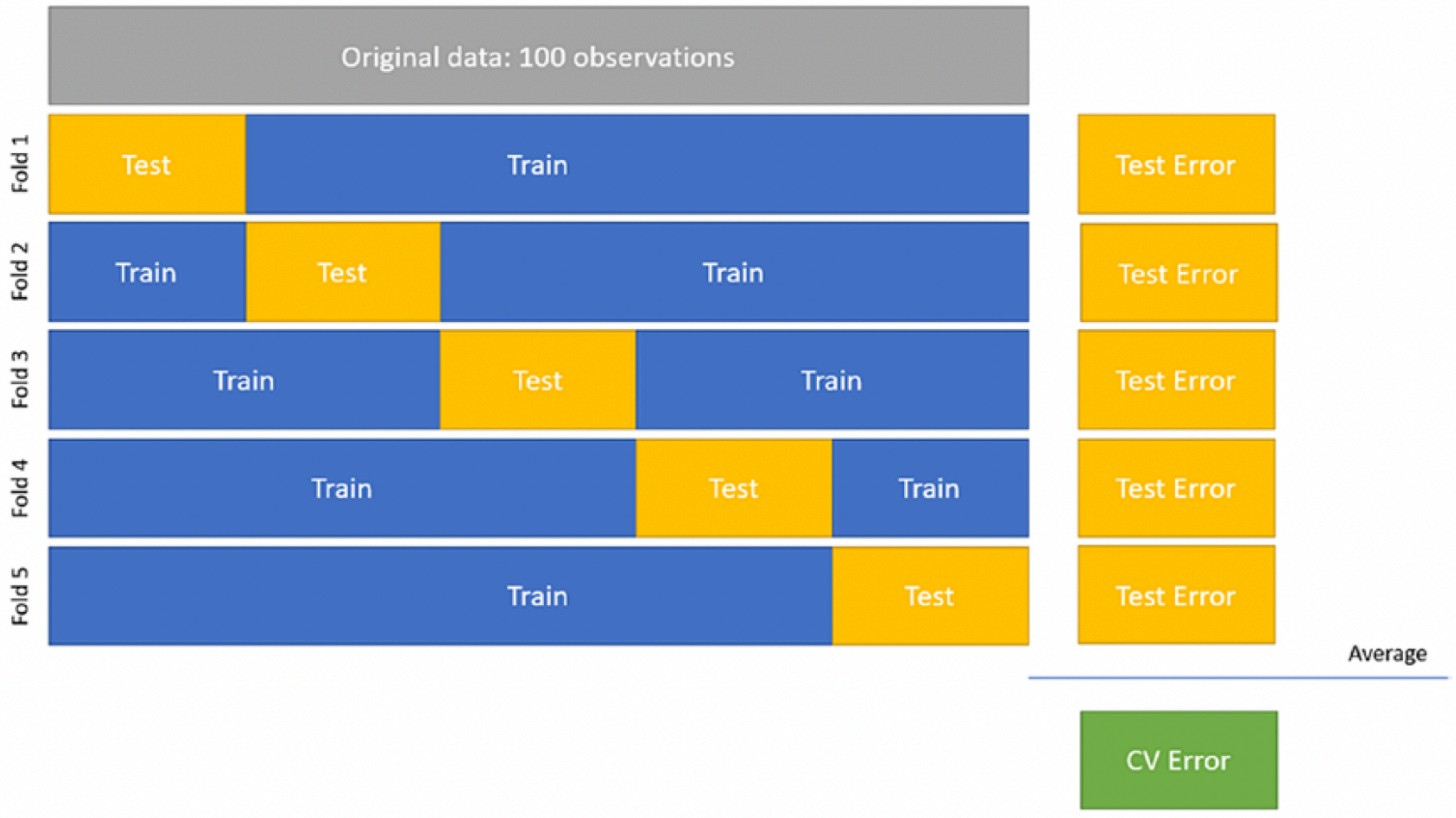
PREDICȚII PENTRU SERII DE TIMP

- vi se dă seria de timp de mai jos
- propuneți moduri prin care puteți să preziceți următoarea valoare din serie (Q1 2019)
  - valoarea anterioară
  - valoarea din aceeași perioadă a anului trecut
  - media valorilor din aceeași perioadă a anilor trecuți
  - valoarea din aceeași perioadă a anului trecut + inflație (sau indicatori economici)
  - …



PREDICȚII PENTRU SERII DE TIMP

- cum validăm predicții în general în ML

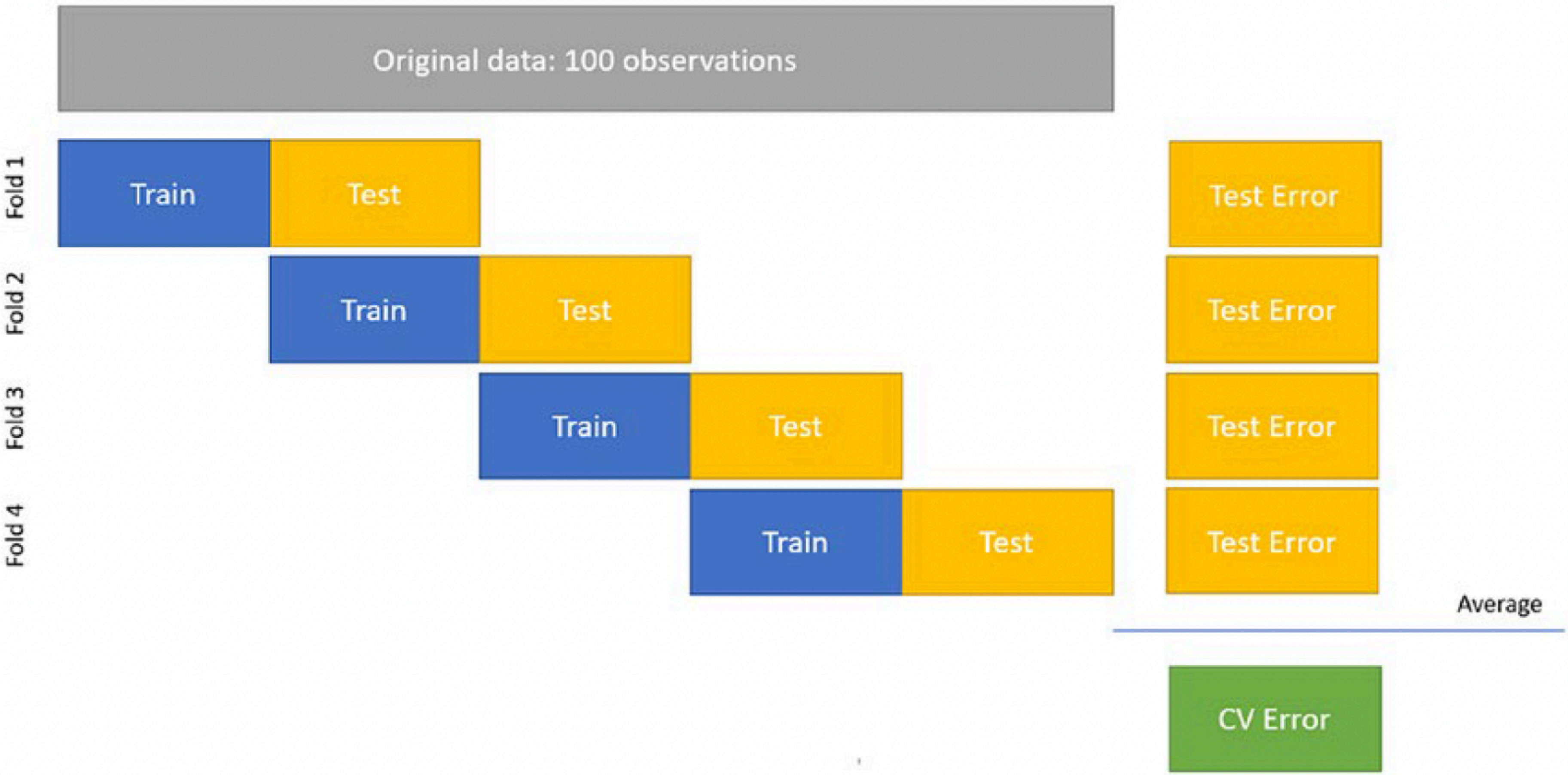


PREDICȚII PENTRU SERII DE TIMP

- cum validăm predicții în general pentru serii de timp

PREDICȚII PENTRU SERII DE TIMP

- cum validăm predicții în general pentru serii de timp cu orizont



MODELE DE PREDICȚIE PENTRU SERII

- modelul autoregresiv (AR)
  - ideea: trecutul afectează viitorul (combinații ale valorilor din trecut pot prezice valori din viitor)
  - la momentul i vom face o combinație liniară de valori anterioare
  - cât de mult mergem în trecut? un orizont p pe care îl alegem

- formularea matematică

$$\hat{y}[i] = x_1 y[i-1] + x_2 y[i-2] + \ldots + x_p y[i-p] = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y[i-1] \\ \vdots \\ y[i-p] \end{bmatrix}$$

- ce este operația de mai sus?

MODELE DE PREDICȚIE PENTRU SERII

- modelul autoregresiv (AR)
    - ideea: trecutul afectează viitorul (combinații ale valorilor din trecut pot prezice valori din viitor)
    - la momentul i vom face o combinație liniară de valori anterioare
    - cât de mult mergem în trecut? un orizont p pe care îl alegem

- formularea matematică

$$\hat{y}[i] = x_1 y[i-1] + x_2 y[i-2] + \ldots + x_p y[i-p] = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y[i-1] \\ \vdots \\ y[i-p] \end{bmatrix}$$

- ce este operația de mai sus? o convoluție

MODELUL AR

- folosim modelul AR și faptul că ne dorim $y[i] \approx \hat{y}[i]$ pentru fiecare i

- exemplu: $p = 2$
  - $\hat{y}[i] = x_1 y[i-1] + x_2 y[i-2]$
  - $\hat{y}[i-1] = x_1 y[i-2] + x_2 y[i-3]$
  - $\hat{y}[i-2] = x_1 y[i-3] + x_2 y[i-4]$
  - …

  - scris echivalent ca matrice:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}[i] \\ \hat{y}[i-1] \\ \hat{y}[i-2] \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[i-1] & y[i-2] \\ y[i-2] & y[i-3] \\ y[i-3] & y[i-4] \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

  - și pentru că ne dorim $y[i] \approx \hat{y}[i]$ atunci în ecuația de mai sus înlocuim valorile prezise cu valorile colectate (least squares - cele mai mici pătrate)

MODELUL AR

- folosim modelul AR și faptul că ne dorim $y[i] \approx \hat{y}[i]$ pentru fiecare i

$$\begin{bmatrix} y[i] \\ y[i-1] \\ y[i-2] \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[i-1] & y[i-2] \\ y[i-2] & y[i-3] \\ y[i-3] & y[i-4] \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- scris echivalent $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{x}$

- ce dimensiune are fiecare variabilă?

MODELUL AR

- folosim modelul AR și faptul că ne dorim $y[i] \approx \hat{y}[i]$ pentru fiecare i

$$\begin{bmatrix} y[i] \\ y[i-1] \\ y[i-2] \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[i-1] & y[i-2] \\ y[i-2] & y[i-3] \\ y[i-3] & y[i-4] \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- scris echivalent $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{x}$

- ce dimensiune are fiecare variabilă?
  - $\mathbf{y}$ este $m \times 1$
  - $\mathbf{Y}$ este $m \times p$
  - $\mathbf{x}$ este $p \times 1$

- m se numește orizontul de timp
- p este dimensiunea modelului AR
- ce relație este între aceste numere?

MODELUL AR

- folosim modelul AR și faptul că ne dorim $y[i] \approx \hat{y}[i]$ pentru fiecare i

$$\begin{bmatrix} y[i] \\ y[i-1] \\ y[i-2] \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[i-1] & y[i-2] \\ y[i-2] & y[i-3] \\ y[i-3] & y[i-4] \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- scris echivalent $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{x}$
- ce dimensiune are fiecare variabilă?
  - $\mathbf{y}$ este $m \times 1$
  - $\mathbf{Y}$ este $m \times p$
  - $\mathbf{x}$ este $p \times 1$
- m se numește orizontul de timp
- p este dimensiunea modelului AR
- ce relație este între aceste numere? $N \geq m + p$

MODELUL AR

- folosim modelul AR și faptul că ne dorim $y[i] \approx \hat{y}[i]$ pentru fiecare i

$$\begin{bmatrix} y[i] \\ y[i-1] \\ y[i-2] \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[i-1] & y[i-2] \\ y[i-2] & y[i-3] \\ y[i-3] & y[i-4] \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- scris echivalent $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{x}$
- soluția: $\mathbf{x}^\star = \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{y} = (\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{y}$
- predicția la pasul următor este: $\hat{y}[i+1] = (\mathbf{x}^\star)^T \begin{bmatrix} y[i] \\ y[i-1] \\ \vdots \\ y[i-p+1] \end{bmatrix}$

MODELUL AR

- cum calculăm $\mathbf{x}^\star = \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{y} = (\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{y}$?
- observăm că trebuie să calculăm $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$ și $\gamma = \mathbf{Y}^T\mathbf{y}$
- observăm că: $\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$
- observăm că: $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$
- deci avem nevoie de aceste valori γ_i?

MODELUL AR

- cum calculăm $\mathbf{x}^\star = \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{y} = (\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{y}$?
- observăm că trebuie să calculăm $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$ și $\gamma = \mathbf{Y}^T\mathbf{y}$
- observăm că: $\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$
- observăm că: $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$
- deci avem nevoie de aceste valori $\gamma_i = \sum_{j=1}^{p} y[j]y[j-i]$?

MODELUL MA

- modelul medie glisantă (moving average - MA)
    - ideea: trecutul afectează viitorul (combinații ale valorilor din trecut pot prezice valori din viitor)
    - la momentul i vom face o combinație liniară de erori anterioare
    - cât de mult mergem în trecut? un orizont p pe care îl alegem

- formularea matematică

$$\hat{y}[i] = \theta_1\epsilon[i-1] + \theta_2\epsilon[i-2] + \ldots + \theta_p\epsilon[i-p] + \mu = \begin{bmatrix}\theta_1 & \ldots & \theta_p & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon[i-1] \\ \vdots \\ \epsilon[i-p] \\ \mu\end{bmatrix}$$

- ce este operația de mai sus?

DATA VIITOARE

- detalii despre modelul MA
- modelul ARMA
- modele mai avansate